Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

RECUPERATORIO de 1[er] Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

1 de noviembre de 2013

TEMA: **41**

1		2			3		4	Nota Final
1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1 p.	2 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 60 MINUTOS

Ejercicio n° 1

a) Halle las raíces de: $z^2 - (4 - j)\,z + 3 - 3\,j = 0$ en forma binómica.

) Calcule: $z = (z_1)^{z_2}$ (z_1 y z_2 son las raíces halladas en a) siendo z_1 la de menor módulo).

Ejercicio n° 2:

Indique Verdadero o Falso justificando correctamente:

a) La transformada Z de $x(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ n & \text{si } 1 < n < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ es: $X(z) = \dfrac{2z^2 + 2z + 3}{z^3}$

b) La transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ es: $F(\omega) = \dfrac{-2\ \cos(\omega)}{\omega}$

c) $L\,[\,\text{sen}^2(t)\,] = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$

ercicio n° 3:

a) Construya una función de transferencia G(s) con coeficientes reales, sabiendo que los únicos polos son $p_1=2j$, $p_2=-2j$ y $p_3=-5$ (simples), el único cero finito es $z=0$ (simple) y $|G(j)| = 1/\sqrt{26}$

b) Indique si el sistema cuya transferencia es la obtenida en parte a) es estable. Justifique.

Ejercicio n° 4:

Resuelva aplicando Transformada de Laplace: $\begin{cases} y'(t) + \int_0^t x(u)\,du = 2t \\ y(t) - x(t) = t^2 \end{cases}$ con $y(0)=1$

Firma del alumno: ....

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 41

Ejercicio 1:

a) Resolviendo con la fórmula cuadrática se llega a: $z_1 = 1 - j$ y $z_2 = 3$

b) $(z_1)^{z_2} = -2 - 2\,j$

Ejercicio 2:

a) VERDADERO. $Z[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = 2 \bullet z^{-1} + 2 \bullet z^{-2} + 3 \bullet z^{-3} = \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} = \frac{2z^2 + 2z + 3}{z^3}$

b) FALSO:

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} 1\, e^{-j\omega t}\, dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{-j\omega}(e^{-j\omega} - e^{j\omega}) = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = 2\,\frac{sen(\omega)}{\omega} \quad (\text{ si } \omega \neq 0)$$

Si $\omega = 0 \Rightarrow F(\omega) = 2$.

c) VERDADERO. $sen^2(t) = (1 - \cos(2t)) /2 \Rightarrow sen^2(t) = 0.5 - 0.5 \cos(2t)$

Por linealidad: $L[sen^2(t)] = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)} = \frac{s^2+4-s^2}{2s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}$

Ejercicio 3:

$G(s) = \frac{k\,s}{(s^2+4)(s+5)}$ Como $|G(j)| = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \left| \frac{k\,j}{(j^2+4)(j+5)} \right| = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \frac{k}{3\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

entonces $k = 3$

Finalmente queda: $G(s) = \frac{3\,s}{(s^2+4)(s+5)}$ es un sistema marginalmente estable.

Ejercicio 4:

$$sY(s) - 1 + \frac{X(s)}{s} = \frac{2}{s^2} \wedge Y(s) - X(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow s^3\,Y(s) - s^2 + s\,X(s) = 2 \wedge s^3\,Y(s) - s^3\,X(s) = 2$$

Restando: $X(s)\,(s + s^3) = s^2 \Rightarrow X(s) = \frac{s^2}{s(1+s^2)} = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow \boxed{x(t) = \cos(t)}$

$$Y(s) = X(s) + \frac{2}{s^3} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^3} \Rightarrow \boxed{y(t) = \cos(t) + t^2}$$

0:20
1:00

Mat Sup 1° parcial

Tema 41
1-11-13

EJ 1

a) Halle las raíces de $z^2-(4-j)z+3-3j=0$ en forma binómica.

$a=1$; $b=-(4-j)$; $c=3-3j$

$$z_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4-j+\sqrt{(-4+j)^2-4(3-3j)}}{2a}=\frac{4-j+\sqrt{3+4j}}{2}=\frac{4-j+w_{1,2}}{2}$$

$$\cdot\ w^2=3+4j \xrightarrow[|w|=5]{x=3} w_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5+3}{2}}\pm\sqrt{\frac{5-3}{2}}\,j \quad w_1=2+j \quad w_2=-2-j$$

$$\to z_1=\frac{4-j+w_1}{2}=\frac{4-\cancel{j}+2+\cancel{j}}{2}=\boxed{3=z_1}$$

$$z_2=\frac{4-j+w_2}{2}=\frac{4-j-2-j}{2}=\boxed{1-j=z_2}$$

b) Calcule: $z=(z_1)^{z_2}$ (z_1 y z_2 son las raíces halladas en a) siendo z_1 la de menor módulo)

$|3|=3>|1-j|=\sqrt{2}$ $\therefore$ $z_1=1-j$, $z_2=3$

$$z=(1-j)^3=(1-j)^2(1-j)=(\cancel{1}-2j\cancel{-1})(1-j)=-2j(1-j)=-2j-2\to\boxed{z=-2-2j}$$

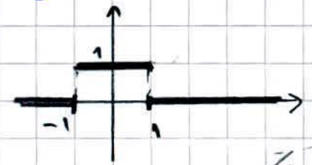
EJ 2 Indique Verdadero o Falso justificando correctamente:

a) La transformada Z de $x(n)=\begin{cases}2 & \text{si } n=1\\ n & \text{si } 1<n<4\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$ es $X(z)=\dfrac{2z^2+2z+3}{z^3}$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(n)}{z^n}=\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z^3}=\frac{2z^2+2z+3}{z^3}$$

$\boxed{V}$

b) La transformada de Fourier de $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } |x|<1\\ 0 & \text{si } |x|>1\end{cases}$ es $F(\omega)=\dfrac{-2\cos(\omega)}{\omega}$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}\,dt=\left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-1}^{1}=\frac{e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{-j\omega}=$$

$$=\frac{1}{\omega}\,\frac{2}{2}\,\underbrace{\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{j}}_{\text{sen}}=\boxed{\frac{2\,\text{sen}(\omega)}{\omega}=F(\omega)}$$

$\boxed{F}$

c) $\mathcal{L}\left[\text{sen}^2(t)\right]=\dfrac{2}{s(s^2+4)}$ $\boxed{V}$

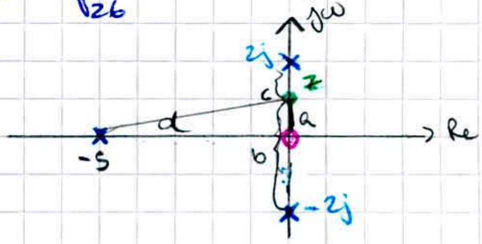
$$\mathcal{L}\left[\text{sen}^2(t)\right]=\mathcal{L}\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos(2t)\right]=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}=\frac{\cancel{s^2}+4-\cancel{s^2}}{2s(s^2+4)}=\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}s(s^2+4)}$$

$$\mathcal{L}\left[\text{sen}^2(t)\right]=\frac{\cancel{2}^{\,1}}{s(s^2+4)}$$

EJ 3

a) Construya una función de transferencia $G(s)$ con coeficientes reales, sabiendo que los únicos polos son $p_1 = 2j$, $p_2 = -2j$ y $p_3 = -5$ (simples), el único cero finito es $z = 0$ (simple) y $|G(j)| = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$$G(s) = \frac{k\,s}{(s+5)(s^2+4)} \qquad k \in \mathbb{R}$$



$$|G(j)| = \frac{k\,a}{b\,c\,d} = \frac{k\,1}{3 \cdot 1 \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \rightarrow \boxed{k = 3}$$

$$G(s) = \frac{3s}{(s+5)(s^2+4)}$$

b) Indique si el sistema cuya transferencia es la obtenida en parte a) es estable. Justifique

1 polo es < 0 y los otros dos tienen parte real 0 $\therefore$ el sistema es marginalmente estable

---

EJ 4 Resuelva aplicando transformada de Laplace: $\begin{cases} y'(t) + \int_0^t x(u)\,du = 2t \\ y(t) - x(t) = t^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y'(t) + \int_0^t x(u)\,du = 2t \\ y(t) - x(t) = t^2 \quad \text{(I)} \end{cases} \qquad y(0) = 1$$

$$\begin{cases} s\,Y(s) - \overset{1}{y(0)} + \frac{X(s)}{s} = \frac{2}{s^2} \rightarrow X(s) = \frac{2}{s} + s - s^2\,Y(s) \\ Y(s) - X(s) = \frac{2}{s^3} \longrightarrow X(s) = Y(s) - \frac{2}{s^3} \end{cases}$$

$$\frac{2+s^2}{s} - s^2\,Y(s) = Y(s) - \frac{2}{s^3} \rightarrow \frac{2+s^2}{s} + \frac{2}{s^3} = Y(s)(1+s^2)$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s^4 + 2}{s^3(1+s^2)} = \frac{s^4 + 2s^2 + 2}{s^3(1+s^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$

$$A(s^4+s^2) + B(s^3+s) + C(s^2+1) + D\,s^4 + E\,s^3 = s^4 + 2s^2 + 2$$

$$\begin{array}{llll} s^4 & A + D = 1 & & A = 0 \\ s^3 & B + E = 0 & & B = 0 \\ s^2 & A + C = 2 & \rightarrow & C = 2 \\ s & B = 0 & & D = 1 \\ \# & C = 2 & & E = 0 \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow \boxed{y(t) = t^2 + \cos(t)}$$

$\times$ I

$$\boxed{x(t) = \cos(t)}$$